Τα Σύμπλοκα

Άσκηση 1

Έστω η ομάδα $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ και μια υποομάδα της $H = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0})\}$. Να βρείτε όλα τα δεξιά και αριστερά σύμπλοκα της $H \leq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

ΛΥΣΗ

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})\}$$

Καταρχάς, μια γενική παρατήρηση είναι ότι:

όταν $\alpha \in H$ και $H \leq G \Rightarrow \alpha H = H = H\alpha$

Δηλ. εδώ:

$(\bar{0},\bar{0}) \in H$ και $H \leq G \Rightarrow (\bar{0},\bar{0}) \oplus H = H = H \oplus (\bar{0},\bar{0})$

$(\bar{1},\bar{0}) \in H$ και $H \leq G \Rightarrow (\bar{1},\bar{0}) \oplus H = H = H \oplus (\bar{1},\bar{0})$

Θα βρούμε τώρα τα σύμπλοκα ως προς κάθε στοιχείο όπου δεν ανήκει στην υποομάδα H.

Όπως $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ αβελιανή τότε δεξιά-αριστερά σύμπλοκα ταυτίζονται
Υπολογίζουμε τα δεξιά σύμπλοκα (ίσα με τα αριστερά)

$(\bar{0},\bar{1}) \oplus H = \{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1})\}$

$(\bar{0},\bar{2}) \oplus H = \{(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{2})\}$

Παρατηρούμε ότι $(\bar{1},\bar{1}) \oplus H = (\bar{0},\bar{1}) \oplus H$ και αυτό επειδή το ζεύγος $(\bar{1},\bar{1}) \in ((\bar{0},\bar{1}) \oplus H)$. Συνεπώς, από όμοιο σχόλιο προκύπτει ότι:

$(\bar{1},\bar{2}) \oplus H = (\bar{0},\bar{2}) \oplus H$, αφού και εδώ $(\bar{1},\bar{2}) \in ((\bar{0},\bar{2}) \oplus H)$

Συνεπώς, έχουμε συνολικά τρία σύμπλοκα: H, $(\bar{0},\bar{1}) \oplus H$, $(\bar{0},\bar{2}) \oplus H$

Δηλαδή, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = H \sqcup ((\bar{0},\bar{1}) \oplus H) \sqcup ((\bar{0},\bar{2}) \oplus H)$

Πρόταση

1) Έστω $H \leq G$ και ορίζουμε τη σχέση
$(\forall a, b \in G): a \sim_H b \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H$.
Τότε, αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας

2) Οι κλάσεις ισοδυναμίας της παραπάνω σχέσης είναι ακριβώς τα δεξιά σύμπλοκα Hb, $b \in G$.

Απόδειξη

1)
- $a \sim_H a \Leftrightarrow a \cdot a^{-1} = e \in H$ αφού $H \leq G$
- $a \sim_H b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \xRightarrow{H \leq G} (ab^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow ba^{-1} \in H \Leftrightarrow b \sim_H a$
- $a \sim_H b$ και $b \sim_H \gamma \Rightarrow ab^{-1} \in H$ και $b\gamma^{-1} \in H \xRightarrow{H \leq G}$

$\Rightarrow (ab^{-1}) \cdot (b\gamma^{-1}) \in H \Rightarrow a \cdot \gamma^{-1} \in H \Leftrightarrow a \sim_H \gamma$.

Εφόσον η σχέση "$\sim_H$" είναι αυτοπαθής, συμμετρική & μεταβατική τότε είναι μια σχέση ισοδυναμίας

2) Συμβολίζουμε με $[a] = \{b \in G / a \sim_H b\}$
Θα δείξουμε ότι $[a] = H \cdot a = \{ba \in G / b \in H\}$
Έτσι,

$[a] = \{b \in G / a \sim_H b\} \overset{\text{συμμετρ.}}{=} \{b \in G / b \sim_H a\} = \{b \in G / b \cdot a^{-1} \in H\} =$

$= \{b \in G / h = b \cdot a^{-1} \in H\} = \{b \in G / b = h \cdot a \in H\} =$

$= \{h \cdot a \in G / h \in H\} = H \cdot a$.

ή (β' τρόπος)

Έστω $b \in [a] \Leftrightarrow a \sim_H b \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H \Leftrightarrow \exists h \in H: h = ab^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = hb \in Hb \Rightarrow a \in Hb$ ①

Το γεγονός $ab^{-1} \in H \underset{H \leq G}{\Rightarrow} (ab^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow ba^{-1} \in H \Rightarrow \exists h' \in H: h' = ba^{-1}$

$\Leftrightarrow h'a = b \in Ha \Rightarrow b \in Ha$ ②

Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε στο ζητούμενο

Ασκηση 2

Εστω $G = \Sigma_3$ και $H \leq \Sigma_3$: $H = \langle f \rangle = \{e, f, f^2\}$

Να βρεθούν όλα τα σύμπλοκα της H στην Σ_3

ΛΥΣΗ

Παρατήρηση : Σ_3 μη αβελιανή $\Rightarrow$ Τα αριστερά δεν ταυτίζονται απαραίτητα με τα δεξιά σύμπλοκα.

Αριστερά Σύμπλοκα (για στοιχεία που δεν ανήκουν στην H):

$gH = \{g, gf, gf^2\}$ όπου $gfg = f^2 \Rightarrow \boxed{gf = f^2g}$ και

$gfg = f^2 \Rightarrow f = g^{-1}f^2g^{-1} \Rightarrow f = gf^2g \Rightarrow \boxed{fg = gf^2}$

Αρα, ουσιαστικά $gH = \{g, gf, gf^2\} = \{g, fg, f^2g\}$

Συνεπώς αφού $fg \in (gH)$ και $f^2g \in (gH) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow gH = fgH = f^2gH$. (Δύο σύμπλοκα)

$\Sigma_3 = H \sqcup gH = H \sqcup fgH = H \sqcup f^2gH$.

Δεξιά Σύμπλοκα (για στοιχεία που δεν ανήκουν στην H)

$Hg = \{g, fg, f^2g\} = gH$ (έτυχε ~~δεν~~ ισχύει παρόλαυτα πάντα)

Ετσι, $\Sigma_3 = H \sqcup Hg = H \sqcup Hfg = H \sqcup Hf^2g$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Lagrange)

Εαν $H \leq G$ με G ομάδα τότε $|H| \,/\, |G|$

Πόρισμα

Ισχύει ότι : $\underset{\text{πλήθος της } G}{|G|} = \underset{\text{πλήθος της } H}{|H|} \cdot [G:H]$ ← πλήθος συμπλόκων

Άσκηση 3

Να βρείτε το δείκτη $[G:H]$ και τα σύμπλοκα της υποομάδας $H=<\bar{6}>$ του $G=\mathbb{Z}_{36}^{\oplus}$.

ΛΥΣΗ

$H=<\bar{6}>=\{\bar{0},\bar{6},\overline{12},\overline{18},\overline{24},\overline{30}\} \longrightarrow |H|=6$

Από, Θεώρημα Lagrange πρέπει $|H|\,/\,|G|$

καθώς: $[G:H]=\dfrac{|G|}{|H|} \Rightarrow [\mathbb{Z}_{36}:<\bar{6}>]=\dfrac{|\mathbb{Z}_{36}|}{|<\bar{6}>|}=\dfrac{36}{6}=6$

Άρα, υπάρχουν 6 (Αριστερά & δεξιά) σύμπλοκα:

$H\oplus\bar{1}=\{\bar{1},\bar{7},\overline{13},\overline{19},\overline{25},\overline{31}\}=\bar{1}\oplus H$

$H\oplus\bar{2}=\{\bar{2},\bar{8},\overline{14},\overline{20},\overline{26},\overline{32}\}=\bar{2}\oplus H$

$H\oplus\bar{3}=\{\bar{3},\bar{9},\overline{15},\overline{21},\overline{27},\overline{33}\}=\bar{3}\oplus H$

$H\oplus\bar{4}=\{\bar{4},\overline{10},\overline{16},\overline{22},\overline{28},\overline{34}\}=\bar{4}\oplus H$

$H\oplus\bar{5}=\{\bar{5},\overline{11},\overline{17},\overline{23},\overline{29},\overline{35}\}=\bar{5}\oplus H$

και η υποομάδα $H=\{\bar{0},\bar{6},\overline{12},\overline{18},\overline{24},\overline{30}\}=H\oplus\bar{0}=\bar{0}\oplus H$

Συνεπώς,

$\mathbb{Z}_{36}=H\sqcup(H\oplus\bar{1})\sqcup(H\oplus\bar{2})\sqcup(H\oplus\bar{3})\sqcup(H\oplus\bar{4})\sqcup(H\oplus\bar{5})$

Άσκηση 4

Αν $(G,\cdot)$ ομάδα τάξης $o(G)<400$ και $H,K\leq G$ τάξης $o(H)=24$ και $o(K)=54$, τότε ποια η τάξη $o(G)$;

ΛΥΣΗ

Εκ του θεωρήματος Lagrange

$o(H)=24\,/\,o(G)$ και $o(K)=54\,/\,o(G) \Longrightarrow \underbrace{\text{Εκπ}(24,54)}_{=216}\,/\,o(G)$

Δηλαδή, $o(G)=k\cdot 216$, $k\in\mathbb{N}$ με $k\geq 1 \xrightarrow[k=1]{o(G)<400} o(G)=216$.

Ασκηση 5

Εστω π και k πρώτοι με $\pi \neq k$. και η ομάδα G τετοια ώστε $|G| = \pi \cdot k$. Να αποδείξετε ότι κάθε κύρια υποομάδα της G είναι κυκλική. Μπορεί η G να είναι κυκλική;

ΛΥΣΗ

Με άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος Lagrange η τάξη της κύριας υποομάδας της G, θα διαιρεί την τάξη της G αλλά γνήσια (δηλαδή δεν υπάρχει περιπτωση οι πληθικοί αριθμοί να ταυτίζονται). Όμως, $\pi \cdot k$ έχει γνήσιους διαιρέτες το 1, π και k με $\pi \neq k$

- Αν το 1 διαιρέτης τότε πρόκειται για την τετριμμένη υποομάδα της G την $\langle e \rangle = \{e\}$
- Αν το π διαιρέτης ή το k διαιρέτης αφού G πεπερασμένη τότε θα είναι κυκλική

(Θεώρημα: $|G| < \infty$ με $|G| = p$: πρώτος $\Rightarrow$ G κυκλική)

Εάν τώρα θεωρήσουμε ως $G = \Sigma_3 \Rightarrow |\Sigma_3| = 6 = 2 \cdot 3$ και ξέρουμε ότι δεν είναι κυκλική

Απόδειξη (Θεωρήματος)

Εστω $|G| = p$, p: πρωτος και ότι G όχι κυκλική

τότε: $(\exists b \in G)(\forall a \in G): a^k \neq b$ για όλα τα k.

τότε η υποομάδα $H = \langle b \rangle$ θα πρέπει να διαιρεί την τάξη της G οπου p: πρώτος (↯)

δεν μπορεί να είναι το p, διοτι τότε, θα ήταν κυκλική

Άρα, G κυκλική.

Άσκηση 6

Έστω $(G,\cdot)$ ομάδα και $H, K \leq G$ τέτοιες ώστε:
$|H| = |K| = p$, p: πρώτος. Εάν, $H \neq K$ τότε νδο $H \cap K = \{e\}$

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι $H \cap K \leq H, K$

Άρα, από θεώρημα Lagrange

$$[H : H\cap K] = \frac{|H|}{|H\cap K|} = \frac{p}{|H\cap K|} \Rightarrow |H\cap K| = \begin{cases} 1 \rightarrow [H:H\cap K] = p \\ p \rightarrow [H:H\cap K] = 1 \end{cases}$$

$$[K : H\cap K] = \frac{|K|}{|H\cap K|} = \frac{p}{|H\cap K|} \Rightarrow |H\cap K| = \begin{cases} 1 \rightarrow [K:H\cap K] = p \\ p \rightarrow [K:H\cap K] = 1 \end{cases}$$

Ας μελετήσουμε μία των περιπτώσεων και η άλλη όμοια

$[H : H\cap K] = \begin{cases} p \\ 1 \end{cases}$. Αν $[H:H\cap K] = p$ τότε $H \cap K = H$ διότι $H \cap K \leq H$. Όμοια και στην άλλη περίπτωση θα προκύψει ότι $H \cap K = K$. Άρα, $H = K$ αδύνατον διότι από υπόθεση $H \neq K$.

Άρα, η μοναδική περίπτωση είναι $[H : H\cap K] = 1$ και όμοια $[K : H\cap K] = 1 \Longrightarrow |H\cap K| = 1 \Rightarrow H\cap K = \{e\}$.